ARITHMETIQUE

Activité 1 :
1°) a) Effectuez la division euclidienne de 398 par 7 en posant l'opération (c'est-à-dire trouvez le quotient et le reste de cette division).
b) Quelle ligne de calcul juste peut-on écrire avec ce dividende, ce diviseur, ce quotient et ce reste ? (l'égalité demandée commence par 398 = ……)

2°) Effectuez la division euclidienne de 142 par 7. Ecrivez l'égalité correspondante.

3°) Amélie a fait le même travail avec 2017÷7 : elle a trouvé un quotient de 287 et un reste de 8. Qu'en pensez-vous ? Expliquez.

4°) Quels sont les restes possibles quand on effectue une division euclidienne par 7 ?

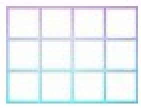
Activité 2 :
1°) Quel est le reste de la division euclidienne de 12 par 2 ? de 12 par 3 ? de 12 par 12 ? de 12 par 5 ?

On dit que 2, 3 et 12 sont des **diviseurs** de 12 et aussi que 12 est un **multiple** de 2, 3 et 12.
En revanche 5 <u>n</u>'est <u>pas</u> un diviseur de 12 et 12 <u>n</u>'est <u>pas</u> un multiple de 5.

2°) Trouvez tous les diviseurs de 36.

Activité 3 :
1°) Faites les tableaux de diviseurs de 36 et de 28.
2°) a) Faites les tableaux de diviseurs de 33 et de 43.
b) Quelle remarque peut-on faire à propos du nombre 43 ?
c) Trouvez 3 autres nombres ayant la même particularité.
On dit que les nombres qui ont exactement deux diviseurs sont des **nombres premiers**.
3°) Trouvez tous les nombres premiers inférieurs à 50.
4°) Trouvez le plus grand nombre premier possible.

Activité 4 :
Les nombres premiers jouent un rôle très important en arithmétique, voilà pourquoi :
1°) 21 est le produit de deux nombres premiers, lesquels ?
2°) 30 est le produit de plusieurs nombres premiers, lesquels ?
3°) Décomposez 42 en produit de facteurs premiers.
4°) En observant les réponses précédentes, trouvez :
a) les deux diviseurs communs de 21 et 30
b) tous les diviseurs communs de 30 et 42
c) tous les diviseurs de 42
d) un multiple commun à 21 et 30
e) le plus petit multiple commun à 30 et 42

Activité 5 :

Bruno possède une plaque d'acier rectangulaire de dimensions 66 cm sur 42 cm.
Il veut découper celle-ci en carrés identiques de telle sorte qu'il ne reste pas d'acier à la fin et que les côtés de chaque carré mesurent un nombre entier de centimètres.
Il se demande quelle taille doivent avoir les carrés.
1°) Amélie lui propose de découper des carrés de 10 cm de côté. Que pensez-vous ? Expliquez.
2°) Trouvez toutes les solutions du problème.

Exercice 1 :
1°) Trouvez un nombre compris entre 121 et 139 qui soit à la fois divisible par 5 et par 3.
2°) Quel chiffre faut-il mettre à la place du point dans le nombre 2•5 pour qu'il soit divisible par 9 ? Et divisible par 5 ?

Exercice 2 :
1°) Faites le tableau des diviseurs de 100.
2°) Trouvez, si possible, le nombre dont les diviseurs sont exactement : 1 ; 27 ; 9 ; 81 ; 729 ; 243 ; 3

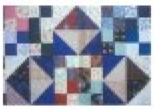
Exercice 3 :
1°) Faites le tableau des diviseurs de 200.
2°) Trouvez, si possible, le nombre dont les diviseurs sont exactement : 1 ; 2 ; 3 ; 11

Exercice 4 : Vrai ou Faux ?
1°) 12 est un diviseur de 180.
2°) 114 est divisible par 14.
3°) Si un nombre est pair alors il a un nombre pair de diviseurs.
4°) Plus un nombre est grand, plus il a de diviseurs.

Exercice 5 :
1°) Les nombres palindromes suivants sont-ils divisibles par 7 ?
77 161 252 2 772 4774 5 005
2°) Tous les nombres entiers palindromes sont-ils divisibles par 7 ? Expliquez.

Exercice 6 :

Un particulier veut clôturer son terrain rectangulaire de 111 m sur 42 m. Pour faire des économies, il veut que l'écart entre deux poteaux soit identique partout et le plus grand possible. Quel sera l'écart entre les poteaux ? Combien y en aura-t-il ?

Exercice 7 :

Sophie veut faire une couverture en patchwork en cousant ensemble des carrés de tissu de taille identique mais de motifs différents. Les dimensions de la couverture doivent être de 2,1 m sur 1,35 m. Pour gagner du temps, elle veut utiliser le moins de carrés possible.
Quelle sera la taille de chaque carré ? Combien y en aura-t-il ?

Exercice 8 :

Un fleuriste a en magasin 135 roses rouges et 108 roses jaunes.
Il veut faire un maximum de bouquets identiques où toutes les fleurs sont utilisées.
Combien peut-il faire de bouquets ? Quelle est la composition de chaque bouquet ?

Exercice 9 :

Pour fêter la nouvelle année, des grands-parents annoncent à leurs petits enfants qu'ils donnent 525 € à partager entre leurs petits-fils et 450 € à partager entre leurs petites-filles.
Rassurez-vous, chacun des petits enfants reçoit ainsi la même somme d'argent, très belle somme d'ailleurs !
1°) Quelle est cette somme ?
2°) Combien ces grands-parents ont-ils de petits-fils et de petites filles ?

Exercice 10 :
On veut placer des points sur le segment [AB] et sur le segment [BC] de telle sorte que :
• la distance entre deux points consécutifs soit toujours la même et la plus grande possible
• la distance entre deux points consécutifs soit un nombre entier de millimètre

1°) Quelle est cette distance ?
2°) Combien de points seront à placer sur [AB] ? sur [BC] ?

Exercice 11 : Vrai ou Faux ? Justifiez chacune des 5 réponses.
1°) Un nombre premier ne peut pas avoir 0 comme chiffre des unités.
2°) Un nombre premier peut avoir 5 comme chiffre des unités.

3°) 2 est le seul nombre premier pair.
4°) 63 n'est pas un nombre premier.
5°) Tous les nombres impairs sont des nombres premiers.

Exercice 12 :
1°) Parmi les nombres ci-dessous, lequel est un nombre premier ?
44 56 25 17 18 14
2°) Trouvez tous les nombres premiers compris entre 120 et 130.
3°) Quel est le plus petit diviseur premier de 18 ? de 25 ? de 51 ? de 77 ? de 405 ?

Exercice 13 :
Dans chaque cas, trouvez si possible :
1°) un nombre premier divisible par 3.
2°) un nombre entier dont le double est un nombre premier.
3°) un nombre entier dont la moitié est un nombre premier.

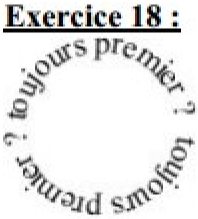
Exercice 14 :

Amélie veut partager sa boîte de macarons équitablement avec ses amies mais elle se rend compte que ce partage est impossible à réaliser. L'une de ses amies est diabétique : elle ne peut pas manger de macarons. Malgré cela, Amélie ne peut pas réaliser le partage. Une autre est allergique aux amandes : elle ne mange pas de macarons mais le partage n'est toujours pas possible. Ses autres amies laissent volontiers leur part l'une après l'autre mais, à chaque fois, le partage est impossible. Quelles déductions pouvez-vous en faire ?

Exercice 15 :
Expliquez pourquoi chacun des nombres suivants n'est pas premier :
145 381 372 156 240 175

Exercice 16 :
Dites si les nombres suivants sont premiers. Expliquez.
33 71 80 81 95 123

Exercice 17 :
Si n désigne un nombre entier positif alors $2n+3$ est un nombre premier. Vrai ou faux ? Expliquez.

Exercice 18 :


1°) Calculez $2x^2 + 5$ lorsque $x = 0$. Le résultat obtenu est-il un nombre premier ?
2°) Le résultat est-il premier quand $x = 1$?
3°) Recommencez avec $x = 2$.
4°) D'après les trois premières questions, quelle conjecture peut-on faire ?
5°) Démontrez ou infirmez cette conjecture.

Exercice 19 :
La célèbre formule $n^2–n+41$ due au mathématicien suisse Leonhard Euler donne-t-elle toujours des nombres premiers quel que soit le nombre entier n ?

Exercice 20 :
Trouvez le nombre premier le plus proche des nombres suivants :
1°) 10 2°) 20 3°) 34 4°) 61 5°) 94

Exercice 21 :
Dans chaque, expliquez pourquoi le résultat du calcul n'est pas un nombre premier.
1°) $2\times9\times5+3$ 2°) $36\times5\times7+27$ 3°) $4\times5\times7+45$ 4°) $11\times13–7\times13$ 5°) $19\times23+1$

Exercice 22 :
En faisant un tableau, trouvez tous les diviseurs de 24. Lesquels sont des nombres premiers ?

Exercice 23 :
Sophie range 12 pions sur une grille en les disposant en rectangle.
On considère que les deux rangements suivants sont identiques :

1°) Dessinez tous les rangements différents possibles.
2°) Amélie possède x jetons, x supérieur à 1. Elle ne peut les disposer en rectangle que d'une seule façon. Que peut-on alors affirmer sur le nombre x ?

Exercice 24 :
Pour sortir du labyrinthe, il faut aller d'une pièce à l'autre en passant par des nombres premiers. Quelle est la sortie ?

Exercice 25 :
Ecrivez les nombres premiers plus petits que 100 tels que si on échange le chiffre des dizaines et celui des unités, on obtient encore un nombre premier. On les appelle les nombres premiers palindromes.

Exercice 26 :
Elise est née au mois d'Août et la date de son jour anniversaire est un nombre premier supérieur à 10 dont la somme des chiffres est 11. Quel jour Elise fête-t-elle son anniversaire ?

Exercice 27 :
391 n'est pas premier. Prouvez-le !

Exercice 28 :
Décomposez chaque nombre en produit de facteurs premiers.
45 65 34 48

Exercice 29 :
Décomposez 100 et 102 en produit de facteurs premiers.

Exercice 30 : Vrai ou Faux ? Justifiez votre réponse.
1°) 15×12 est la décomposition en produit de facteurs premiers de 180.
2°) Les nombres 2 et 5 sont les seuls facteurs premiers dans la décomposition du nombre 20.
3°) La somme de deux nombres impairs peut être un nombre premier.
4°) Le produit de deux nombres premiers peut être un nombre premier.
5°) La somme de deux nombres premiers peut être un nombre premier.

Exercice 31 :
Décomposez chaque nombre en produit de facteurs premiers.
56 42 93 110

Exercice 32 :
Amélie a écrit $224 = 7\times8\times4$.
1°) Est-ce la décomposition de 224 en produit de facteurs premiers ? Pourquoi ?
2°) Trouvez la bonne décomposition de 224.
3°) Elise a écrit $256 = 16\times16$. Trouvez la décomposition de 256 en produit de facteurs premiers.

Exercice 33 :
Décomposez chaque nombre en produit de facteurs premiers.

550 320 425 1000

Exercice 34 :
1°) Trouvez un nombre premier qui divise à la fois 20 et 35.
2°) Sachant que $2\,016 = 32 \times 63$, trouvez la décomposition en produit de facteurs premiers de 2 016.

Exercice 35 :
Décomposez chaque produit en produit de facteurs premiers.

27×24 26×38 63×23

Exercice 36 :
Décomposez chaque produit en produit de facteurs premiers.

$10^3 \times 24$ $28^2 \times 49$ $21^2 \times 35^4$

Exercice 37 :
Quel est le seul nombre premier qui divise 1914 mais pas 1848 ? Et inversement ?

Exercice 38 :
1°) Décomposez 42 en produit de facteurs premiers.
2°) Grâce à la réponse précédente, faites la liste des diviseurs de 42.

Exercice 39 :
1°) Donnez la décomposition en produit de facteurs premiers de 8 712 sachant que $88 \times 99 = 8\,712$.
2°) Dites, sans effectuer de calculs, si chacun des nombres suivants est un diviseur de 8 712.

6 33 8 $2^2 \times 3 \times 11$ $3^2 \times 11^2$ $2^2 \times 7$

Exercice 40 :
1°) Ecrivez la décomposition en produit de facteurs premiers de 45 puis celle de 150.
2°) Dites, sans effectuer de calculs, si chacun des nombres suivants est un diviseur de 45 ou de 150.

3 $3^2 \times 5$ 2×5^2 3×5^2 5×7 $2 \times 3 \times 11$

3°) Quel est le plus grand diviseur commun à 45 et 150 ?

Exercice 41 :
Quel est le plus grand diviseur commun de :
1°) 8 et 20 ? 2°) 20 et 9 ? 3°) 15 et 21 ? 4°) 44 et 88 ?

Exercice 42 :
Grâce aux critères de divisibilité ou à la décomposition en produit de facteurs premiers, simplifiez ces fractions pour les rendre irréductibles.

$A = \frac{60}{40}$ $B = \frac{126}{198}$ $C = \frac{105}{90}$

Exercice 43 :
1°) Décomposez 224 et 280 en produit de facteurs premiers.
2°) Simplifiez $\frac{224}{280}$ pour la rendre irréductible.

Exercice 44 :
1°) Décomposez 68, 96 et 180 en produit de facteurs premiers.
2°) Simplifiez $\frac{96}{68}$, $\frac{180}{96}$ et $\frac{68}{180}$ pour les rendre irréductibles.

Exercice 45 :
Trouvez deux nombres dont les seuls diviseurs communs premiers sont 3 et 7.

Exercice 46 :
Sachant que $286 = 2\times11\times13$ et que $308 = 2^2\times7\times11$, simplifiez la fraction $\frac{286}{308}$ pour la rendre irréductible.

Exercice 47 :
Simplifiez ces fractions pour les rendre irréductibles.

$A = \frac{2^3\times5\times11}{2\times3\times5^2}$ $\quad$ $B = \frac{2^2\times3^4\times5^2\times7}{2^4\times3^2\times5^2\times7^2}$

Exercice 48 :
Voici deux décompositions en produit de facteurs premiers.

$520 = 2^3\times5\times13$ $\quad$ $390 = 2\times3\times5\times13$

Simplifiez ces fractions pour les rendre irréductibles.

$A = \frac{520}{390}$ $\quad$ $B = \frac{52}{390}$ $\quad$ $C = \frac{26}{39}$ $\quad$ $D = \frac{1040}{780}$

Exercice 49 :
Simplifiez ces fractions pour les rendre irréductibles.

$A = \frac{48}{75}$ $\quad$ $B = \frac{126}{180}$ $\quad$ $C = \frac{360}{252}$ $\quad$ $D = \frac{220}{100}$

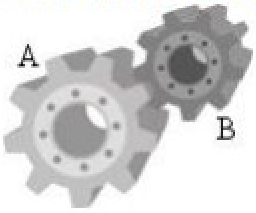
Exercice 50 :
Simplifiez ces fractions pour les rendre irréductibles.

$A = \frac{16}{28}$ $\quad$ $B = \frac{250}{100}$ $\quad$ $C = \frac{180}{190}$ $\quad$ $D = \frac{245}{65}$

Exercice 51 :
1°) Sophie dit : « La fraction $\frac{220}{11}$ est irréductible car 11 est un nombre premier. » Qu'en pensez-vous ?

2°) Amélie dit : « Si le numérateur d'une fraction est un nombre premier alors cette fraction est irréductible. » Qu'en pensez-vous ?

Exercice 52 :
Dans chaque cas, deux roues d'engrenage A et B sont en contact. Au bout de combien de tours de chacune de ces roues seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?



1°) A a 3 dents et B a 5 dents.
2°) A a 12 dents et B a 8 dents.
3°) A a 15 dents et B a 35 dents.
4°) A a 18 dents et B a 30 dents.
5°) A a 56 dents et B a 77 dents.

Exercice 53 :
Un primeur dispose de 24 pommes et 36 poires.
Il souhaite préparer avec ces fruits des paquets de composition identique.
1°) S'il fait 4 paquets, quelle est leur composition ?
2°) Combien de paquets le primeur peut-il faire au maximum ?

Exercice 54 :
On dispose de plusieurs rectangles de dimensions 16 cm et 14 cm.
Quel est le côté du plus petit carré que l'on peut former avec ces rectangles ?

Exercice 55 :

Deux bus A et B partent en même temps du terminus à 7 h.
Le bus A part toutes les 36 min du terminus alors que le bus B part toutes les 24 min.
A quelle heure les deux bus partiront de nouveau ensemble en même temps :
• pour la première fois ? • pour la deuxième fois ? • pour la cinquième fois ?

Exercice 56 :
Quand on effectue la division euclidienne de 29 par 5, il reste 4. Quand on divise 29 par 3, il reste 2.
1°) Quel est le plus petit nombre supérieur à 29 qui respecte ces deux conditions ?
2°) Quels sont les deux nombres suivants qui respectent ces deux conditions ?
Quand on effectue la division euclidienne de 32 par 6, il reste 2. Quand on divise 32 par 4, il reste 0.
3°) Quel est le plus petit nombre supérieur à 32 qui respecte ces deux conditions ?
4°) Quels sont les deux nombres suivants qui respectent ces deux conditions ?

Exercice 57 :
Trouvez un nombre supérieur à 2 017 qui a : le même reste que 142 dans la division euclidienne par 36 et le même reste que 142 dans la division euclidienne par 21.

Exercice 58 :

Le vélo d'Elise possède trois plateaux A, B et C munis respectivement de 28, 38 et 48 dents. Sur sa roue arrière, elle dispose de 5 pignons fixes (notés P_1 à P_5) avec 14, 17, 20, 24 et 28 dents (respectivement).
1°) Elle roule avec le braquet A-P_5. A un instant, la valve de gonflage est tout en bas. Combien de tours de pédalier Elise doit-elle faire pour que cette valse se retrouve de nouveau tout en bas pour la 1ère fois ?
2°) Même question avec les braquets A-P_3, C-P_4, C-P_3 et B-P_2.

Exercice 59 :
1°) a) Choisissez un entier à deux chiffres. Ajoutez-lui son palindrome. Le résultat est-il divisible par 11 ?
b) Recommencez avec un autre entier de deux chiffres.
2°) On veut démontrer la remarque faite à la question 1°. Pour cela on utilise la numération : un nombre qui s'écrit ab (il a pour chiffre des dizaines « a » et pour chiffre des unités « b ») vaut $10\times a+b$.
a) Comment s'écrit le palindrome du nombre ab ? Combien vaut-il, en fonction de a et de b ?
b) Exprimez en fonction de a et de b le résultat de l'addition. Simplifiez le résultat puis factorisez-le.
c) Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 60 :
1°) a) Choisissez un entier à trois chiffres. Enlevez-lui son palindrome. Le résultat est-il divisible par 9 ?
b) Recommencez avec un autre entier de trois chiffres.
2°) Démontrez que l'on obtient toujours un multiple de 9.

Exercice 61 :
1°) On choisit un nombre de deux chiffres : 56. On forme un nombre de quatre chiffres en écrivant deux fois côte à côte le nombre choisi : 5656. Ce nombre est-il divisible par 101 ?
2°) Recommencez la première question avec un autre nombre.
3°) Quelle conjecture peut-on faire ? Démontrez ou infirmez cette conjecture.

Exercice 62 :
1°) Vérifiez que les nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13 et 17 s'écrivent sous la forme $4n+1$ ou $4n+3$ (où n désigne un nombre entier).
2°) En utilisant la division euclidienne par 4, expliquez pourquoi un nombre entier est de l'une des formes $4n$ ou $4n+1$ ou $4n+2$ ou $4n+3$.
3°) Expliquez pourquoi un nombre premier supérieur ou égal à 3 est de l'une des forme $4n+1$ ou $4n+3$.
4°) Existe-t-il des nombres de la forme $4n+1$ ou $4n+3$ qui ne sont pas premiers ?